Historia y Didáctica de los número racionales e irracionales

Francisco Luis
Flores Gil

publicatuslibros.com

Historia y didáctica de los números racionales e irracionales

Francisco Luis Flores Gil

Dedicado a mis queridos padres
Natividad y Manuel,
mis mejores profesores...

Publicatuslibros.com es una iniciativa de:

íttakus

Íttakus, sociedad para la información, S.L.
C/ Sierra Mágina, 10.
23009 Jaén-España
www.ittakus.com

publicatuslibros.com

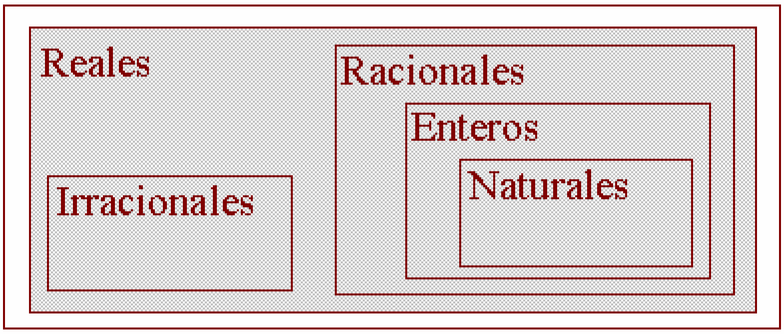
Índice

1. Introducción.

Los números racionales junto con los números irracionales forman los números reales. Hoy en día no podríamos entender las matemáticas sin estos conceptos, que ya eran usados por algunas de las civilizaciones de la antigüedad.

La intuición de que existen números con escritura decimal no periódica, cuyas cifras se suceden indefinidamente sin obedecer a ley alguna determinada, es clave para la construcción conceptual de los números reales.

La contraposición de los números irracionales a los racionales hace que sea conveniente su introducción a partir de 3º y 4º de la E.S.O. En estos cursos los alumnos ya tienen amplios conocimientos aritméticos y geométricos de los números naturales, enteros y racionales, por lo que la inclusión de los irracionales es casi una necesidad.



Posteriormente los alumnos continuarán ampliando los conocimientos y aplicaciones sobre los números reales en Bachillerato, tal y como lo recogen los currículos vigentes.

El tratamiento de esta unidad en la E.S.O. será en principio fácil, ya que los números racionales e irracionales son usados en la vida cotidiana con asiduidad. Esto se lo deberemos hacer ver a los alumnos para despertar así su interés y curiosidad en el tema.

2. Historia de los racionales y los irracionales.

Racionales

Los números racionales o fracciones aparecieron muy pronto en la historia de las matemáticas.

Como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema. Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número natural. Así surgieron los números racionales.

Las fracciones aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.

En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa.

Sin embargo, no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

Irracionales

El concepto o la idea de número irracional apareció pronto en la geometría. Ya los antiguos griegos observaron que los números racionales no completaban la recta.

Quizás el primero en constatarlo fue el célebre filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos (582 a.C. – 507 a.C.), quien estudiando un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, observó que la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo no podía tener un valor racional. Con esto demostró la no completitud de los números racionales y dedujo la existencia de unos números hasta entonces desconocidos.

La Escuela Pitagórica llamó a dichos números inconmensurables. Al principio la aparición de estos "desconocidos" desconcertó de forma alarmante a los miembros de la Escuela Pitagórica, pues la existencia de los irracionales ponía en evidencia que muchas suposiciones y demostraciones de la geometría eran falsas o estaban incompletas. La sorpresa y preocupación llegó hasta tal punto que llegaron a plantearse el mantener en secreto estos números que contradecían su doctrina, que entre otras cosas preconizaba "la adoración del número como ente perfecto que gobernaba el universo y todo lo que en él existía".

Tres siglos después de su descubrimiento, Euclides trata en su obra "Los Elementos" el tema de los números irracionales, y llega a demostrar que la raíz cuadrada de dos no puede ser un número racional.

Los matemáticos griegos posteriores estudiaron además de estos irracionales sencillos, otros cada vez más complicados, encontrándose tipos como raíz cuadrada de (raíz cuadrada de a + raíz cuadrada de b) y otros semejantes, pero nunca llegaron a tener la idea general de número irracional. Esta idea aparece ya bien entrado el siglo S. XVI, al considerar la idea de un número decimal aperiódico, esto es un número decimal cuyas cifras se sucedían de manera indefinida sin obedecer a ley alguna determinada.

3. Objetivos didácticos de la unidad.

Las matemáticas contribuyen decisivamente en la consecución de los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria. Durante su aprendizaje los alumnos van desarrollando su capacidad de reflexión lógica y su capacidad de pensamiento y abstracción.

El objetivo general de la asignatura de matemáticas durante la E.S.O. debe ser, además de dar a los alumnos unos conocimientos para su futuro laboral y profesional, el que adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y deberes en nuestra sociedad actual.

Para tal fin es necesario un correcto conocimiento de los conceptos de los números reales y su división en números racionales y números irracionales. Por lo tanto la unidad de los números racionales e irracionales resulta ser una unidad básica para poder cumplir los objetivos de materia y de etapa.

Además cualquier unidad didáctica que quiera tratar este tema, independientemente de tratarse de 3º o 4º de la E.S.O., deberá tener unos objetivos propios básicos, que serán:

- Incorporar al lenguaje utilizado en la comunicación habitual las diversas ampliaciones del campo numérico, para aumentar la comprensión de los fenómenos que nos rodean.
- Clasificar los distintos tipos de números: naturales, enteros, racionales... para un mejor conocimiento de los mismos, de manera que se amplíe la capacidad de comunicación y comprensión frente a los fenómenos que nos rodean.
- Definir el conjunto de los números reales. Determinar propiedades y operaciones que se realizan con los números reales.
- Representar en la recta numérica números reales. Establecer la nomenclatura adecuada para designar tramos en la recta real.
- Leer y escribir correctamente cantidades expresadas en notación científica. Utilizarla de manera adecuada para comunicar información en los casos que así lo aconsejen.
- Manejar con soltura los números racionales e irracionales en la calculadora.
- Reconocer las posibilidades de la notación científica para expresar de modo muy comprensivo números muy grandes o muy pequeños.

Profundizando y buscando unos conceptos más específicos podríamos definir los siguientes objetivos, tanto para 3º como para 4º de la E.S.O.:

- Expresar fracciones en forma decimal.
- Distinguir los números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.

- Obtener la expresión fraccionaria de los números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.
- Reconocer los números irracionales como números decimales no periódicos con infinitas cifras.
- Clasificar los números decimales en racionales e irracionales.
- Representar los números racionales e irracionales en la recta real.
- Utilizar los intervalos para expresar conjuntos de números.
- Calcular aproximaciones de un número irracional por exceso y por defecto.
- Aproximar números utilizando las técnicas de redondeo y truncamiento.

Deberemos tener en cuenta que, en caso de haber visto esta unidad en 3º de la E.S.O., para los alumnos de 4º podremos incluir otros temas a tratar, tales como las potencias y las raíces.

4. Competencias básicas en la unidad.

Se entiende por competencias básicas de la educación secundaria obligatoria el conjunto de destrezas, conocimientos y actitudes adecuadas al contexto que todo el alumnado que cursa la E.S.O. debe alcanzar para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la integración social y el empleo.

A partir del año 2008 todos los cursos de la E.S.O. deberán incluir un apartado de competencias básicas en su programación, y será recomendable que en la unidad didáctica indiquemos que competencias básicas contribuiremos a adquirir.

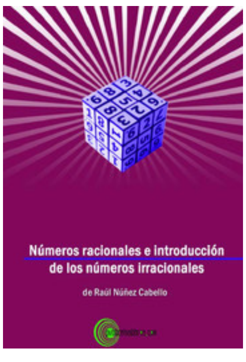
La adquisición de las competencias básicas permitirá al alumnado tener una visión ordenada de los fenómenos naturales, sociales y culturales, así como disponer de los elementos de juicio suficientes para poder argumentar ante situaciones complejas de la realidad.

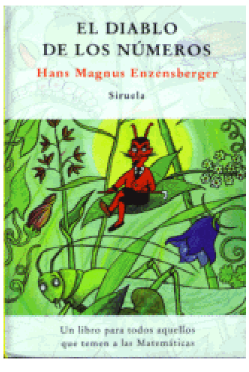
La organización y funcionamiento de los centros, las actividades docentes, las formas de relación que se establezcan entre los integrantes de la comunidad educativa y actividades complementarias y extraescolares pueden facilitar también el logro de las competencias básicas.

La lectura constituye un factor primordial para el desarrollo de las competencias básicas. Los centros deberán garantizar en la práctica docente de todas las materias un tiempo dedicado a la misma en todos los cursos de la etapa.

Con este fin recomendaremos la lectura de libros que traten los números racionales e irracionales de una manera sencilla y sin demasiada profundidad, adecuado al nivel de los alumnos de educación secundaria. Algunos títulos interesantes para ellos serían:

- Números racionales e introducción de los irracionales. Autor: Raúl Núñez Cabello. Editorial Publicatuslibros.com.
- Matemáticas, Números reales 3 ESO, Cuaderno 1. Autor: Manuela García Domínguez. Editorial: Cesma.
- El diablo de los números. Autor: Hans Magnus Enzensberger. Editorial Siruela.





El currículo de la educación secundaria obligatoria deberá incluir, de acuerdo con lo recogido en el Anexo I del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, al menos las siguientes competencias básicas:

a) Competencia en comunicación lingüística, referida a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita tanto en lengua española como en lengua extranjera, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

Será importante que el alumno/a sea capaz de leer y entender los enunciados de los problemas sin dificultad, así como que sepa procesar la información que aparece en los enunciados. Así mismo deberán poder redactar procesos matemáticos y las soluciones a los problemas.

b) Competencia de razonamiento matemático, entendida como la habilidad para utilizar números y operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión del razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones y para resolver problemas relacionados con la vida diaria y el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

c) Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y natural, que recogerá la habilidad para la comprensión de los sucesos, la predicción de las consecuencias y la actividad sobre el estado de salud de las personas y la sostenibilidad medioambiental. Para ello será importante que los alumnos sean capaces de comprender ciertos conceptos científicos y técnicos que hoy en día podemos ver en cualquier medio de comunicación.

d) Tratamiento de la información y competencia digital, entendida como la habilidad para buscar, obtener, procesar y comunicar la información y transformarla en conocimiento, incluyendo la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como un elemento esencial para informarse y comunicarse.

e) Competencia social y ciudadana, entendida como aquélla que permite vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Para ello será importante ser capaz de analizar los datos estadísticos relativos a la ciudadanía que en los diferentes medios de comunicación podemos ver diariamente.

f) Competencia cultural y artística, que supone apreciar, comprender y valorar críticamente diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de disfrute y enriquecimiento personal y considerarlas como parte del patrimonio cultural de los pueblos. Será importante que los alumnos sean capaces de analizar expresiones artísticas visuales desde el punto de vista matemático así como conocer otras culturas, especialmente en un contexto matemático.

g) Competencia para aprender a aprender, supone disponer de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.

h) Competencia para la autonomía e iniciativa personal, referido por una parte a la adquisición de la conciencia y aplicación de un conjunto de valores y actitudes personales interrelacionadas, como la responsabilidad, la perseverancia, el conocimiento de sí mismo y la autoestima, la creatividad, la autocrítica, el control emocional, la capacidad de elegir, de calcular riesgos y de afrontar los problemas, así como la capacidad de demorar la necesidad de satisfacción inmediata, de aprender de los errores y de asumir riesgos. Incluye también la capacidad emprendedora para idear, planificar, desarrollar y evaluar un proyecto.

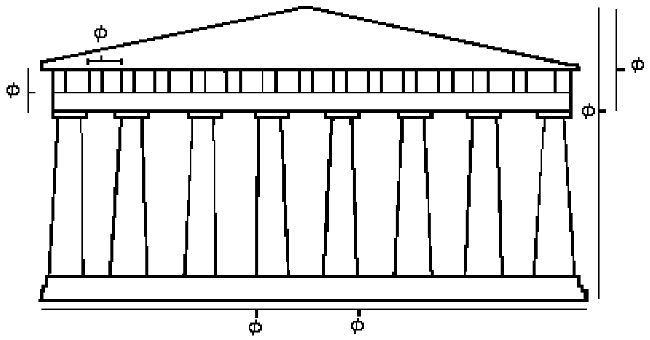
Las matemáticas en general y esta unidad sobre los números racionales e irracionales en particular, podrán colaborar a la adquisición de las siguientes competencias básicas:

- Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje.

- La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas contribuye a mejorar la competencia en tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. Ya hemos comentado la cantidad de completos programas informáticos existentes para la realización de cálculos con números racionales e irracionales y la creación de gráficas, entre otras utilidades.

- Las matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística, ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita. El estudio de los números reales requiere ciertos conceptos y términos específicos que el alumno aprenderá a usar.

- Las matemáticas contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística, porque el mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, siendo la geometría en particular parte integral de la expresión artística de la humanidad, al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado.
- El conocimiento de los números reales es especialmente importante por ejemplo en arquitectura, ya que es fundamental a la hora de realizar cálculos de estructuras, dimensiones, pesos, etc. También es útil en dibujo, pintura, o escultura, para obtener proporciones adecuadas que aumenten la belleza de la obra. Un conocido ejemplo el Parthenon, cuyo frontal se diseñó manteniendo en todo momento las proporcionalidades áureas.



- Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal, porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre, controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones.
- La unidad dedicada a los números reales (racionales e irracionales) deberá contener gran cantidad de problemas de todo tipo. La resolución de los mismos hará que el alumno obtenga la confianza necesaria en sus capacidades, y los conocimientos necesarios para poder enfrentarse a problemas en su vida cotidiana.

5. Contenidos de la unidad.

El medio para alcanzar las capacidades enumeradas en los objetivos lo constituyen los contenidos.

La unidad didáctica sobre los números racionales e irracionales la incluiremos dentro del bloque de Aritmética y Álgebra que aparecerá en nuestra programación.

Dividiremos los contenidos en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

5.1 Contenidos conceptuales.

Naturalmente, los contenidos de la unidad variarán según el curso para el que la queramos usar. En primer lugar definiremos unos contenidos conceptuales básicos y a continuación daremos otros contenidos con los que los podremos completar:

Contenidos conceptuales básicos:

- Números decimales exactos. Fracciones decimales.
- Números decimales periódicos puros y periódicos mixtos.
- Expresión decimal de una fracción.
- Expresión fraccionaria de un número decimal exacto y periódico.
- Números irracionales.
- Sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos. Números reales.
- Clasificación de los distintos tipos de números.
- Intervalos de números reales.
- Aproximaciones decimales de números racionales e irracionales.

Contenidos conceptuales para ampliar la unidad:

- Número decimal periódico y su fracción generatriz.
- Números naturales, enteros y racionales elevados a potencias de exponente natural y exponente negativo.
- La notación científica.
- El rectángulo áureo como expresión de la relación entre dos magnitudes que no se puede expresar como un número racional.
- Algunos irracionales conocidos: π, ϕ y raíces cuadradas o de índice superior de un número natural, si no es entera.
- Operaciones que pueden realizarse con números reales. Propiedades.
- Representación de números reales. La recta real. Nomenclatura para designar determinados tramos de la recta real.

5.2 Contenidos procedimentales.

- Obtención de la expresión decimal de una fracción.
- Obtención de la expresión fraccionaria de un número decimal exacto o periódico.
- Utilización de los porcentajes para expresar fracciones y números decimales.
- Realización mental de operaciones con números decimales y porcentajes.
- Utilización de diferentes procedimientos para efectuar cálculos de manera lo más sencilla posible.
- Clasificación de números reales en números racionales y números irracionales.
- Búsqueda de propiedades y relaciones en conjuntos de números.
- Expresión de conjuntos de números reales mediante intervalos.
- Obtención de aproximaciones decimales de números racionales e irracionales por exceso y por defecto, y mediante redondeo y truncamiento hasta un orden dado, dando cuenta del error absoluto cometido en cada caso.
- Realización de operaciones con números reales utilizando sus aproximaciones decimales y evaluando el error cometido.
- Métodos geométricos, teorema de Pitágoras, para la representación de ciertos números reales en la recta real.
- Representación de números reales en la recta real mediante sucesivas aproximaciones decimales.
- Comparación de números reales utilizando sus aproximaciones decimales.
- Resolución de problemas reales que impliquen la utilización de números decimales, porcentajes, números reales y aproximaciones.
- Uso de las calculadoras científicas para efectuar cálculos y adquirir destrezas operatorias con raíces cuadradas, potencias y raíces de cualquier índice.

5.3 Contenidos actitudinales.

- Valorar la presencia y utilidad de los números decimales en contextos reales.
- Analizar de forma crítica los porcentajes en distintos contextos.
- Interés por la búsqueda de números reales en las matemáticas y en problemas relacionados con la vida real.
- Disfrute por la presentación ordenada de los trabajos realizados para calcular aproximaciones decimales de números reales.
- Valoración de las propias capacidades para resolver problemas cotidianos en los que se deban utilizar de alguna manera los números reales, con y sin calculadora. Gusto por la precisión en los cálculos realizados.

6. Temas transversales a tratar en la unidad didáctica.

Como ya hemos dicho, el uso de los números racionales e irracionales es algo cotidiano en nuestra vida diaria. Esto hará que el tratamiento de los temas transversales sea fácil en el aula debido a que los alumnos observarán pronto la utilidad de lo explicado.

Dentro de los muchos temas transversales que podremos exponer en esta unidad hemos elegido algunos de los definidos en la legislación vigente, y a continuación hemos expuesto una serie de sugerencias para su desarrollo en el aula.

Educación de los hábitos de consumo.

Resulta recomendable que el alumno desarrolle el sentido crítico para consumir de forma adecuada y responsable, valorando la información sobre las cantidades v la medida de las cosas. Podemos utilizar:

- Una primera aplicación de los números reales es el manejo fluido de las fracciones y los porcentajes, cuestión importante, ya que facilita el desarrollo de un sentido crítico ante situaciones de compra y venta donde aparezcan. El estudio de la proporcionalidad y en particular de los porcentajes permite una interpretación exacta de los valores de rebajas e incrementos de los precios de los artículos comerciales.
- Actividad sobre elaboración del presupuesto familiar, aprovechando la necesidad de trabajar con decimales (redondeo) al utilizar euros. Se puede aprovechar la actividad para concienciar a los alumnos la importancia de una buena planificación económica por parte de todos. Es necesario que los alumnos valoren la importancia de un consumo responsable y tomen conciencia de que dominar las operaciones y cálculos básicos es fundamental para desenvolverse con éxito en la sociedad actual.

Educación ambiental y para el desarrollo sostenible.

Es importante la sensibilización por los elementos físicos y biológicos del medio natural, y que el alumno valore y participe en actividades de conservación del medio natural.

Puede plantearse una actividad que podemos titular: “La lluvia y los pluviómetros”. Tratará de un tema de gran interés medio ambiental, como es el agua. A la hora de abordarlo conviene fomentar la preocupación científica y social sobre problemas relacionados con el agua, como la sequía y las inundaciones. Un estudio de la capacidad de nuestra cuenca hidráulica y de los recursos hídricos de los que disponemos puede ser utilizado para trabajar con fracciones, porcentajes y decimales.

Educación para la paz. Educación para la diversidad cultural.

Mediante la utilización de ejercicios y actividades sobre los números racionales y reales relacionados con el reparto. Así fomentaremos en los alumnos la idea de igualdad y justicia.

En clase deberemos incidir en la necesidad de compartir con los demás, sin olvidar la importancia de ser tolerantes con las personas que son diferentes por su raza, sexo o condición social.

Educación para la salud

El conocimiento del propio cuerpo y de sus órganos es una parte esencial en la educación para la salud. Para poder desarrollar este tema transversal podremos realizar en clase las siguientes actividades:

- Actividad que pide cuantificar los glóbulos rojos que tenemos en la sangre, la cantidad de sangre en nuestro cuerpo y el porcentaje que supone dicha sangre con respecto al peso corporal de una persona.
- Actividad sobre una figura humana (por ejemplo una estatua o un alumno voluntario) utilizando las distancias ombligo-pies y ombligo-cabeza para relacionar su cociente con el número áureo.

Educación para la diversidad cultural.

Respeto y valoración de la aportación de las distintas culturas en la búsqueda de sistemas de numeración eficaces y en el desarrollo de las matemáticas en general.

El progreso de la Humanidad como resultado de la aportación de todas las culturas.

Para tratar este tema podremos usar la introducción histórica de este libro para que de esa forma, los alumnos puedan comprobar cómo diferentes civilizaciones y culturas han ido contribuyendo con sus conocimientos y estudios, tanto en éste como en todo tipo de temas, al avance y desarrollo de la sabiduría de la humanidad.

7. Temporalización de la unidad.

Esta unidad puede llegar a ser bastante extensa por lo que tendremos que atenernos al tiempo que podamos dedicarle, a la hora de plantearnos los objetivos y contenidos de la misma.

Igualmente no será igual la temporalización en un curso de 3º que de 4º de la E.S.O. ya que se supone que los de cuarto curso conocen ya la materia tratada.

Lo normal será que en 3º de la E.S.O. dediquemos unas 8 o 9 sesiones a la unidad y en 4º de la E.S.O. unas 6 o 7 sesiones, siempre según el nivel inicial de los alumnos.

Otro tema a tener en cuenta será el uso de recursos didácticos para ampliar los contenidos, el uso de ordenadores, libros, etc hará que necesitemos dedicar más tiempo a la unidad del que en un principio pensáramos. No obstante, debemos tener en cuenta que la unidad didáctica debe de ser un documento abierto, de forma que aunque inicialmente tuviésemos pensado dedicar un tiempo determinado, si luego observáramos que fuese necesario realizar alguna actividad de ampliación, siempre podríamos extender el tiempo dedicado a la unidad.

8. Metodología posible a usar en la unidad.

8.1 Principios metodológicos generales de la asignatura.

Será importante que conozcamos los principios metodológicos generales de la asignatura, ya que cualquiera de ellos los podremos aplicar en la unidad.

Los principios metodológicos del área de matemáticas serían:

- En la E.S.O. es cuando el niño empieza a desarrollar y a usar verdaderamente su capacidad de razonamiento y abstracción. Las matemáticas son una herramienta imprescindible para lograr los mejores avances en estos campos. El profesor debe fomentar al máximo el esfuerzo en sus alumnos para lograr en ellos el mejor desarrollo en ambas facultades.
- Las matemáticas deben ser mostradas a los alumnos por el profesor de la manera más cercana posible al mundo cotidiano. El alumno/a debe de entender que está rodeado por conceptos matemáticos que además no deja de usar.
- Los alumnos de la E.S.O. tienen gran interés en las nuevas tecnologías, y las matemáticas constituyen un área en la que el uso de las TIC son muy útiles, ayudando como recursos didácticos al profesor. Éste además podrá hacer ver a los alumnos que todas las nuevas tecnologías que nos rodean tienen sus principios en conceptos matemáticos
- Las matemáticas es una asignatura que fomenta la imaginación y la curiosidad en los alumnos. Un mismo problema, ejercicio o juego matemático puede resolverse de muchas formas posibles, y todas ellas darán el mismo resultado correcto. Al mismo tiempo, habrá otros ejercicios o problemas que sean o tengan resultados sorprendentes. Todo esto debe ser usado por el profesor para que el alumno/a se sienta atraído por la asignatura, haciendo uso del mayor número posible de este tipo de ejercicios o juegos y destacando así el carácter lúdico de la asignatura.
- El trabajo en grupo debe ser animado por el profesor de matemáticas, quien debe desarrollar actividades que cree hábitos de trabajo en equipo, fomentando la participación de todos los alumnos.
- En las matemáticas, será fundamental que el profesor presente el contenido de forma bien estructurada, organizada y secuenciada, adaptándose a las particularidades de cada alumno/a, ya que es muy importante respetar los ritmos de aprendizaje de ellos.
- Asimismo es importante respetar la forma cíclica de la enseñanza de las matemáticas, logrando por ejemplo que los alumnos que tuviesen algún problema la primera vez que se explicara algo, tuvieran la opción de enterarse en otra ocasión.
- Los temas deben iniciarse con una pequeña introducción que afiance y resuma los contenidos en los que se base la nueva unidad didáctica, y que ya hayan sido vistos anteriormente por los alumnos. De esta forma se da continuidad y se facilita la comprensión de los nuevos conceptos.

- El profesor de matemáticas debe mostrar a los alumnos la relación de las matemáticas con otras asignaturas. Al hacer esto el profesor logrará que el alumno/a asiente mejor los conocimientos y le haga ver la importancia y trascendencia de las matemáticas.

8.2 Principios metodológicos propios de la unidad.

La unidad deberá iniciarse con explicaciones y pruebas que persigan un doble objetivo: evaluar los conocimientos previos, y motivar a los alumnos por el aprendizaje de nuevos contenidos. En este sentido, proponemos la realización de las siguientes actividades:

- Las actividades de arranque irán orientadas a repasar conceptos ya conocidos por los alumnos, recordando los distintos conjuntos de números, las operaciones posibles entre ellos y sus representaciones en la recta.
- Es importante llamar la atención de los alumnos sobre la presencia y utilidad de los números fraccionarios y los números decimales en contextos de la vida real: partes de un total, medidas de magnitudes (longitud, área, volumen" etc.), sistema monetario, etc.
- Pedir a los alumnos que aporten ejemplos propios les ayuda a reflexionar sobre esa utilidad.
- Aportar ejemplos de números irracionales en distintos contextos (geométricos, artísticos, de la vida real,...), llamando la atención sobre los números más conocidos: п, el número áureo, etc.

En cuanto al nivel y dificultad del tema, se prestará especial atención a:

- Las relaciones entre conjuntos numéricos entrañan cierta dificultad para los alumnos y hay que asegurarse de que son comprendidas. Es necesario hacer hincapié en la relación de identidad existente entre los números racionales y 1os decimales periódicos.
- El salto conceptual de los números racionales a los irracionales puede resultar complicado por la aparición de infinitas cifras que no se repiten.
- Conviene dedicar un especial esfuerzo para que los alumnos alcancen el mayor grado de comprensión posible a la hora de identificar y trabajar con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad. La detección de las dificultades es posible realizarla a partir de las actividades propuestas.

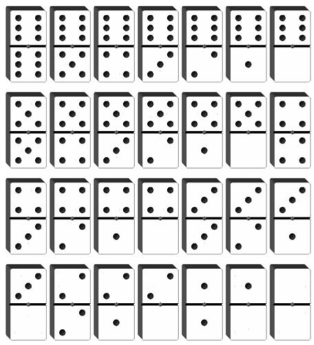
Otras sugerencias didácticas a tener en cuenta son:

- Practicar el paso de números decimales a fraccionarios y viceversa, haciendo hincapié en la equivalencia de ambas expresiones. Dichas actividades servirán como introducción del número irracional, haciendo ver la imposibilidad de expresarlos como fracciones.

- La representación gráfica de números irracionales, que en esta unidad se realiza sobre todo a través de sus sucesivas aproximaciones decimales, debería ser suficiente para que los alumnos se den cuenta de la íntima relación existente entre la recta real y el conjunto de todos los números reales.
- Las aproximaciones decimales de los números irracionales son un instrumento eficaz a la hora de realizar operaciones y ordenar conjuntos de números reales. El profesor debe evaluar el nivel de rigor con que se debe medir el error cometido, sobre todo en aquellas actividades que tengan relación con la geometría o la vida cotidiana.
- Practicar con la recta real, representando números, intervalos abiertos y cerrados, semirrectas y valores absolutos.
- Es importante que los alumnos sean conscientes del error que conlleva toda medida. Por ello, pueden proponerse ejemplos en los que, a partir de situaciones reales, sea notoria la falta de exactitud en una estimación.

Como materiales didácticos se podrán utilizar tanto en 3º como en 4º de la E.S.O. los siguientes recursos:

- La calculadora científica constituye una herramienta básica en el desarrollo de esta unidad. Los alumnos deben aprender cuáles son las teclas que deben utilizar en cada caso, y adquirir habilidades en su manejo. Para ello se propone la práctica con fracciones, cálculo de porcentajes, aproximaciones decimales de los números reales, etc.



- Juegos de dominó en los que intervengan los números reales y sus representaciones en la recta real.
- Vídeos. De la serie "Ojo matemático": Cálculos aproximados (nº 16) Metrovídeo Española.
- Programas de ordenador de cálculo matemático.
- Papel milimetrado para representar sucesivas aproximaciones de un número irracional.

Algunas estrategias a las que podemos recurrir son:

- Ofrecer en cada caso el tiempo necesario para la construcción significativa de los conocimientos.
- Alternar el trabajo individual con el de grupo y propiciar el intercambio fluido de papeles entre alumnos para corregir posibles prejuicios sexistas.
- Diversificar el uso de códigos y modos de expresión con objeto de que los alumnos establezcan relaciones pertinentes.
- Individualizar, en la medida de las posibilidades, el seguimiento del aprendizaje de cada alumno.
- Coordinar los distintos ritmos de trabajo y de adquisición de conocimientos.

9. Actividades.

Las actividades o experiencias de aprendizaje son el conjunto de tareas o actuaciones de toda índole que los alumnos y las alumnas deben realizar para alcanzar los objetivos previstos y adquirir los contenidos seleccionados. Es importante disponer de un amplio y variado repertorio de actividades para atender (sin dificultades añadidas) al estilo y al ritmo de aprendizaje de cada alumno o alumna. Con ello, sin embargo, no se pretende homogeneizar los tiempos de actividad y las tareas propiamente dichas. Un mismo tiempo educativo puede y debe permitir la realización de actuaciones diversas en un mismo grupo de alumnos y alumnas.

Obviamente serán diferentes las actividades a realizar en 3º y 4º curso de la E.S.O., no obstante trataremos de exponer varias que puedan ser usadas en cualquiera de los dos cursos. Las actividades las podremos clasificar en varios tipos:

9.1 Actividades de introducción.

Tratarán de averiguar las ideas, los intereses, las necesidades, etc., de los alumnos y las alumnas sobre los contenidos que se van a trabajar. Con ellas, se suscitará la curiosidad intelectual y la participación de todos en las tareas educativas.

Necesidad de ampliación de los números racionales.

Podríamos decir, como afirmaba Pitágoras, que en el mundo que nos rodea todo puede medirse o contarse con números enteros o sus cocientes, los números fraccionarios. Su famoso teorema dio origen a los números irracionales, ya que si los catetos de un triángulo rectángulo miden un metro de lado, la hipotenusa no se puede expresar con un número racional. Compruébalo tú mismo. Además, observa como la realidad confirma este hecho:

1º- ¿Es posible expresar la diagonal de un salón rectangular de 6 por 5 metros con un número racional?

2º - ¿Se puede expresar mediante un número racional la longitud perimetral de cualquier plaza circular, por ejemplo, la de una de radio 10 m?

Algunos números "raros".

A pesar de ser los más utilizados en la vida diaria, a veces los números racionales pueden acarreamos sorpresas "desagradables". Fíjate en esta situación real:

1º - Raúl quiere comprar un tercio de kilo de jamón. El charcutero, muy amable, que esa cantidad exacta no se puede vender. ¿Podrías convencer a Raúl de que el charcutero tiene razón?

De todas maneras, un número como el anterior, llamado periódico, no es lo más frecuente en lo cotidiano. Una forma de comprenderlo consiste en realizar el siguiente experimento:

2°.- Se meten en una bolsa bolas marcadas con las 10 cifras. Se saca una bola y se anota su cifra para formar la parte decimal del número y se mete de nuevo en la bolsa. Se repite el mismo proceso para obtener la segunda cifra, la tercera y así sucesivamente. La probabilidad de que, al repetir este proceso, aparezca un bloque de cifras que se repita constantemente es muy pequeña. Por ejemplo, para el número de la actividad anterior, 0,3333..., a partir de la coma tendría que salir indefinidamente en cada extracción un 3… Parece muy improbable.

Continuemos con otro número que seguramente ya conoces de otros cursos:

3º- Historia de Pi (π). En un documento egipcio escrito hacia el 1650 a.C. (el papiro de Rhind) ya se menciona este número y se le da un valor de 256/81, o lo que es 3,1604. Compáralo con las cuatro primeras cifras de pi. ¿Te parece que habían afinado mucho? Más adelante, el matemático chino Tsu Cheng-Chih (que vivió hace 1500 años) le dio un valor de 355/113. Utiliza la calculadora y observa el resultado. ¿Es mejor aproximación que la anterior?

Será interesante que sepas que el número pi nunca podrá expresarse mediante una fracción, ya que es un número que tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

La idea de designar el número con el símbolo π es bastante más reciente que las aproximaciones anteriores. Es de hace unos 300 años y se le ocurrió al matemático inglés William Jones, aunque quien popularizó su uso fue el suizo Leonard Euler unos cien años más tarde, en el S.XVIII.

William Jones

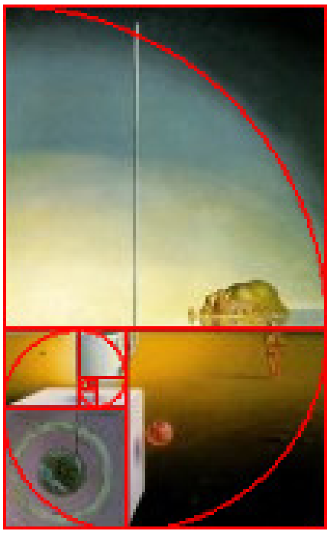
A lo largo de la historia, los matemáticos de todo el mundo han tratado de obtener las mayores aproximaciones a π. Una de las últimas es la que lograron David y Gregory Chudnovsky, de la Universidad de Columbia, en Nueva York, que hallaron el valor de π con 1.011.196.691 decimales. Escrita en folios normales, la cifra que obtuvieron ocuparía unas 260.000 páginas.

4º- Este número que te mostramos ahora no lo conoces. Si embargo, está presente en nuestra vida cotidiana o en manifestaciones artísticas, aunque no te hayas dado cuenta:
Coge tu DNI, un bonobús o una tarjeta de crédito. Mide el largo y el ancho y divide ¿Qué número resulta? Aproximadamente 1,6. Más exactamente, 1,618... Parece a simple vista un número cualquiera, pero en realidad para los matemáticos es un "número de oro". Y a en la antigua Grecia, filósofos y artistas descubrieron que los rectángulos cuyos lados a y b están en relación a/b = 1,618... son especialmente armoniosos (por ejemplo, uno en el que el lado corto tenga 10 centímetros, y el largo 16,18. Dibújalo en tu cuaderno) Un

rectángulo así lo llamaron rectángulo áureo. A ese número le dieron por nombre número áureo. Es el resultado de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Realiza esta operación con tu calculadora y observa como vuelve a salir 1,618... Lo simbolizaron con la letra griega Φ (fi) en honor del escultor Fidias, maestro de las proporciones. El rectángulo áureo tiene una curiosa propiedad. Si creas en él un cuadrado como lado el lado corto del rectángulo, la parte que sobra es, a su vez, un rectángulo áureo. Hazlo con el rectángulo que has dibujado antes. Resulta una especie de hijo del anterior que guarda exactamente las mismas proporciones que su padre. Vuelve a medir los lados del nuevo rectángulo obtenido y efectúa la división corres ponte. De nuevo 1,6...

A lo largo de la historia, muchos artistas han apreciado la belleza y la armonía de los rectángulos áureos. Cientos de cuadros están pintados sobre lienzos que guardan exactamente esas proporciones, y las fachadas de algunas de las grandes obras de la arquitectura (el Partenón de Atenas o la catedral de Notre Dame de París) son rectángulos áureos. En este cuadro, titulado "Semitaza gigante volando con anexo inexplicable de cinco metros de longitud" el pintor Salvador Dalí dispuso todos los objetos siguiendo rectángulos áureos (ABCD, ABEF, AGHF, IJHF, JH] Toma medidas y comprueba este hecho en algunos de estos rectángulos.



Investiga con la calculadora.

1º. - Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de 237/100. ¿Qué obtienes? ¿Cuántos decimales tiene exactamente el número obtenido? Esta es una fracción decimal exacta.

2º - Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de la fracción 122/99. ¿Qué obtienes? ¿Cuántas cifras decimales aparecen en pantalla? ¿Presentan alguna curiosidad? ¿Son todas las que tiene este número? En realidad tiene infinitas cifras decimales; a la parte decimal que se repite se le llama periodo. ¿Cuál es el este número?

3º.- Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de la fracción 480468/99000. ¿Qué obtienes? ¿Cuántas cifras decimales aparecen en pantalla? ¿Presentan alguna curiosidad? ¿Son todas las que tiene este número? En realidad tiene infinitas cifras decimales; a la parte decimal que se repite se le llama periodo y a las cifras anteriores al periodo, anteperiodo. ¿Cuál es el periodo de este número? ¿Y el anteperiodo?

4º.- Los números decimales anteriores proceden de fracciones, por lo tanto son números racionales. Investiguemos ahora si existen "otros" números.
Para ello obtén con tu calculadora $\sqrt{3}$ ¿Qué obtienes? Si lo has hecho bien has obtenido 1,732050808. ¿Crees que tendrá más cifras decimales? ¿Crees que será periódico? La pantalla solo tiene espacio para mostrarte estas cifras decimales, pero en realidad faltan muchas otras, pues $\sqrt{3}$ es un número decimal no periódico que durante la unidad llamaremos irracional.

Matemáticas e Internet.

- FotoMáticas. Las matemáticas están presentes a nuestro alrededor y una forma de plasmarla es mediante la fotografía. En Internet hay un gran número de páginas con fotos que resaltan algún contenido de matemáticas, por ejemplo, la presencia de números irracionales como π o Φ en la naturaleza y en el arte. Una de estas páginas:

  www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2000/matefoto/libro

- En Internet aparecen muchas cuestiones matemáticas curiosas. Si quieres navegar para encontrarlas, solo tienes que utilizar el buscador Google, cuya dirección es www.google.com, y escribir en la línea de búsqueda "curiosidades matemáticas". Aparecen páginas interesantes de colegios e institutos realizadas por profesores y alumnos.

9.2 Actividades de desarrollo.

Son aquellas actividades que las unidades de programación prevén con carácter general para todo el alumnado.

Vamos a dar a continuación algunos ejemplos que debido a su carácter general servirán tanto para 3º como para 4º de la E.S.O.:

Fracciones y decimales.

1º.- Escribe en forma decimal los siguientes números fraccionarios, indicando si son exactos, periódicos puros o mixtos: 25/100, 3/5, 7/4, 12/40, 2/7, 15/6, 40/13.

2º.- Dadas las fracciones 6/5, 9/2, 11/20, 23/25.
a) Amplifica cada fracción a otra que tenga por denominador una potencia de 10.
b) Expresa luego en forma decimal cada fracción obtenida.

3º.- Escribe los siguientes números en forma de fracción: 2,75; 0,757575... ; 3,12555

4º.- Calcula, pasando a fracción, las operaciones: 0,777... + 0,555 ; 2,4555... Suma luego, directamente, los números decimales, pasa el resultado a fracción y comprueba que se obtiene el mismo resultado.

5º.- María, Luisa y Carmen compran una novela a medias que cuesta 13 euro. a) ¿Pueden pagar las tres la misma cantidad de euros? ¿Por qué? b) ¿ Y si fueran 12,75 euros?

6º.- ¿Cuántos minutos son 6 décimas de hora? ¿Y cuántos minutos representa 0'6666 de hora?

7º.- Un coche circula a una velocidad constante de 110 km por hora. a) ¿Cuántos metros recorre en un minuto? ¿Se puede expresar el resultado en forma decimal exacta? b) Si mantiene la velocidad media a 110, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 275 km? Expresa el resultado en horas y minutos.

8º.- Una clase tiene 28 alumnos. El delegado de la clase dice que se han apuntado para ir de excursión a la sierra 2/3 de los alumnos. ¿Es cierto lo que dice el delegado? Si fuera cierto, ¿cuántos alumnos se habrían apuntado? En otra clase de 36 alumnos se han apuntado el 0,777... de la clase. ¿Qué porcentaje irá de excursión? ¿Cuántos alumnos no irán?

Idea de número irracional. Aproximación y error.

1º.- Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales, razonando la respuesta: a) -2,272727... b) 3,54787878... c) 0,001001100111... d) 5,070077000777..

2º.- Sabemos que π = 3,141592653... es un número irracional que apareció al estudiar la longitud de la circunferencia. Es el resultado de dividir la longitud de la circunferencia por el diámetro. Contesta a lo siguiente:
a) ¿Será irracional el número 100π? Razona la respuesta.
b) Escribe las cinco primeras aproximaciones de este número, por defecto y por exceso.
c) A lo largo de la historia se han dado muchas aproximaciones de π por números fraccionarios. Tolomeo dio 377/120 y Liu-Hui 355/113; Expresa estas fracciones en forma decimal e indica cuál es el error absoluto en cada caso.

3º.- El número irracional $\sqrt{2}$ = 1,414213562... apareció con el teorema de Pitágoras. Es el resultado de medir la diagonal del cuadrado con el lado unidad.

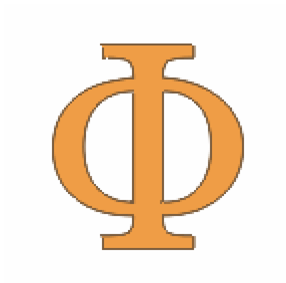
a) Escribe las cinco primeras aproximaciones de este número, por defecto y por exceso.
b) Los babilonios conocían ya la excelente aproximación de este número por la fracción 17/12. Señala el error cometido tomando cuatro cifras decimales.

4º.- Halla el error absoluto y el error relativo generado al tomar las siguientes aproximaciones de 1/9: 0,11 ; 0,111 ; 0,1111.

5º.- Escribe aproximaciones decimales por defecto de los siguientes números con un error menor que una milésima: 5/9, 5/6, 4/11, 8/7.

6º.- La medida del lado de un triángulo equilátero es 8 cm. ¿Qué clase de número es la medida de la altura? ¿El área del triángulo equilátero es un número racional? Razona tu respuesta.

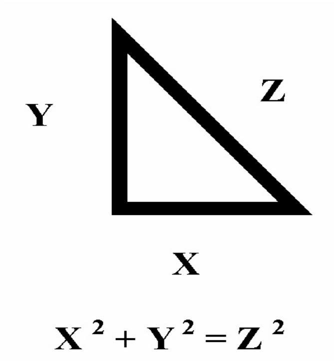
7º.- Un número irracional tan famoso como π es el número áureo que aparece como cociente entre la diagonal del pentágono regular y el lado. Su símbolo es la letra griega Φ (fi) y su valor es $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618033...$



a) ¿Cuánto vale la diagonal de un pentágono regular si el lado mide 10 cm?
b) Redondea su valor hasta los milímetros.

Representación en la recta real. Ordenación de números reales.

1º.- Utiliza el Teorema de Thales para representar 2/5 y -6/5.



2º.- Utiliza el Teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

3º.- Marta dice que entre los números fraccionarios 1/2 y 1/3 no hay ningún número.
a) Dibuja estos números en el segmento unidad OU = 12 cm. ¿Es cierta la afirmación de Marta?
b) Si la contestación es negativa, dibuja algún punto dando su valor.

4º.- Representa por sucesivas aproximaciones decimales los números reales:
$\pi = 3{,}14159...$ y $\sqrt{3} = 1{,}73205...$

5º.- ¿Cuál es el menor de los siguientes números?
a) 3,141 y 3,0141 b) 1,4142135 y 1,4142125

6º.- Escribe tres números reales comprendidos entre 1,4142 y 1,4143.

7º.- Ordena de menor a mayor, sin hacer cálculos, los números $\sqrt{5}$, 1/5, 5, -5,555…, $-\sqrt{5}$.

8º.- Se ha hecho una encuesta en tres colegios para saber cuántos alumnos leen más de dos libros al mes. Los resultados han sido: Colegio A: 2 de cada 10 alumno. Colegio B: 3 de cada 15 alumnos. Colegio C: 20 de cada 100 alumnos.

a) Escribe los resultados en forma fraccionaria, decimal y en tantos por cien.
b) ¿En qué colegio se lee más? ¿En cuál menos?

9º.- Representa el número 1,9999... en la recta:
a) Por sucesivas aproximaciones decimales.

b) Como número racional, expresándolo previamente en forma fraccionaria.

10º.- Ordena de mayor a menor los siguientes números irracionales:
1,10110111011110..., 1,10100100010000..., 1,01001000100001..., 1,01101110111..,

Operaciones con números reales utilizando sus aproximaciones decimales.

1°.- Calcula sin calculadora la suma de los números reales:
$\sqrt{2}$ = 1,414213... y $\sqrt{}$ = 1,732050... con dos decimales exactos.

2º.- Calcula, sin utilizar la calculadora, la suma y el producto de los números 10 y π.
a) Con tres decimales exactos.
b) Con cuatro decimales exactos.

3º.- 20.- Calcula, sin utilizar la calculadora, la suma y el producto de los números $\sqrt{13}$ =3,605551... y $\sqrt{5}$ =2,236067...
a) Con dos decimales exactos.
b) Con tres decimales exactos.

4º.- Los lados de un rectángulo miden $\sqrt{2}$ cm. y $\sqrt{3}$ cm. ¿Su área es un número irracional?

5º.- El lado de un cuadrado mide $\sqrt{2}$ cm. ¿Su área es un número irracional?

6º.- La noria gigante de una feria mide 30 m de diámetro. Cuatro amigos se montan en una cestilla. ¿Cuántos metros recorren en cada vuelta? Aproxima el resultado a metros por defecto o por exceso según sea lo más conveniente.

7º.- Un albañil trabaja en la construcción de una fuente circular. Mide la circunferencia de la fuente y obtiene 31,5 m, y a continuación el diámetro, que, según él, mide 12,2 m. ¿Son correctas las medidas? Si hay error, ¿es aceptable?

8º.- La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,... aparece con frecuencia en la naturaleza, como en la reproducción de los conejos, en la posición de los tallos de una planta, etc.
a) Busca la regla que permite pasar de un término al siguiente.
b) Comprueba que el cociente de un término y el precedente se aproxima hacia el número de oro 1,61803398...

9º.- La parte central de la fachada de la catedral de Nôtre Dame de París, entre las puertas y el comienzo de las torres, forma un rectángulo áureo. Calcula la altura si la anchura mide 48 metros.

10º.- Un recinto de un jardín tiene forma de triángulo equilátero. Si su lado mide 10 m, ¿cuál es su área? Expresa el resultado con una cifra decimal. ¿Qué aproximación consigue? ¿Qué error se comete?

Expresión de conjuntos de números reales mediante intervalos.

1º.- Representa en la recta real los siguientes intervalos:
a) $[-5, -3]$, b) $[-2, 3]$, c) $[1, +\infty]$, d) $[-3, 2]$,
e) $[-\infty, 2]$, f) $[-\infty, -2]$, g) $[3, +\infty]$, h) $[-5, -1]$

2º.- Representa:
a) El intervalo $[3, 4]$ y señala en él tres números racionales cualesquiera.
b) El intervalo $[2, 5]$ y señala en él tres números irracionales cualesquiera.

3º.- Halla los intervalos más pequeños, de extremos números enteros, en cuyo interior se encuentra el siguiente número racional: a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{39}$ c) $\sqrt{33}$ d) $\sqrt{70}$.

4º.- Representa los intervalos de extremos enteros, con un decimal y con dos decimales, que contienen al número irracional $\sqrt{7} = 2,6457...$

5º.- Un círculo de radio 5 cm. tiene su centro en el origen de coordenadas. ¿Qué intervalo determinan los puntos del círculo que pertenecen al eje de abscisas?

9.3 Actividades de refuerzo.

Para aquellos alumnos y alumnas cuyos ritmos de aprendizaje sean más lentos (alumnado con necesidades educativas especiales), es imprescindible la programación de actividades de refuerzo que, de acuerdo con sus características, faciliten el desarrollo de sus capacidades.

Para poder realizarlas con más éxito realizamos las siguientes sugerencias:

- Insistir, si se cree necesario o se aprecian dificultades, en la realización de ejercicios que trabajen la expresión de fracciones en decimales y viceversa, así como las operaciones con porcentajes.
- Realizar actividades sobre diferenciación de números racionales e irracionales y practicar la obtención de aproximaciones por defecto y por exceso de éstos últimos.
- Pedir a los alumnos que planteen y resuelvan por sí mismos problemas que impliquen la realización de aproximaciones de distintos números mediante redondeo y truncamiento.

Algunos ejemplos de estas actividades serían:

1º.- Clasifica las siguientes fracciones según su expresión decimal: 10/9, 2/15, 5/21, 37/10.

2º.- Expresa cada uno de los siguientes números decimales en forma fraccionaria: 4,77777... , 1,234234234... ; 83,56666...

3º.- Calcula, pasando a fracción, las operaciones: a) 3,4545... + 0,555...
b) 6,030303... -1,777..., c) 2,3555 1,8999... d) 3,999... , 1,988...

4º.- Un alumno escribe: 1,4444... + 1,6666... = 3. ¿Es cierto?

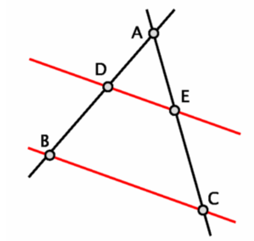
5º.- De los siguientes números, indica cuáles son racionales y cuáles irracionales:
a) 72,1232112321... b) 15,7171171I1711117... c) -8,2525... d) 0,202002...

6º.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 2 cm. y 3 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa? ¿Es un número irracional?

7º.- Escribe el número decimal exacto que se aproxima en cada caso, por defecto y por exceso, hasta la diezmilésima:
a) 2,12345678... b) 7,010203040...
c) 0,818818881... d) 2,252552555...

8º.- Calcula el máximo error que se produce cuando se aproxima 17/3 por 5,66.

9º.- ¿Cuál es el orden de error de las aproximaciones decimales de $\sqrt{42}$ = 6,48074069... cuando se toma: a) 6,48; b) 6,480; c) 6,481?



10º.- Representa en la recta real los números 2/3 y 7/5; para dividir un segmento en 3 ó *5 partes iguales, puedes utilizar el teorema de Thales.*

11º.- Representa en la recta real $\sqrt{85}$, sabiendo que 85 = 72 + 62 y utilizando el Teorema de Pitágoras.

12º.- Ordena de menor a mayor los siguientes números: 7/10, 3/4, π, 33/9, $\sqrt{10}$.

13º.- Halla, si es posible, un número comprendido entre 2,6999... y 2,7000...

14º.- Calcula las siguiente operaciones de modo que el error cometido sea menor que una centésima: a) $\sqrt{2}$ + 4,222... b) $\sqrt{2}$ -0,3579 c) $\sqrt{2}$ - 0,1010010001... d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$.

15º.- Un alumno dibuja una circunferencia de radio 5 cm. Redondea el resultado de su longitud a milímetros.

16º.- Representa en la recta real los siguientes intervalos y expresa mediante un enunciado verbal qué cumplen los números que pertenecen a ellos:
a) [- ∞, 3] b) [-4, -1] c) [1, + ∞]
d) [0,4] e) [-2, + ∞] f) [-1,1]

17º.- Escribe tres números del intervalo (1,4; 1,5)

9.4 Actividades de ampliación.

Son aquellas que posibilitan a los alumnos y a las alumnas seguir avanzando en sus procesos de aprendizaje una vez que han realizado satisfactoriamente las tareas propuestas en una unidad de programación. Habrían de diseñarse para alumnos y alumnas con ritmos de aprendizaje "rápido". Veamos algunos ejemplos:

La equivalencia entre números racionales y decimales exactos y periódicos, y el concepto de número irracional, permite plantear una gran variedad de actividades de cierta complejidad.

1º.- Los números fraccionarios 1/3, 3/7, 4/11 Y 5/13 no tienen por denominador 2, 5 o producto de ambos.
a) Comprueba que sus expresiones decimales son periódicas puras.
b) ¿Se pueden amplificar las fracciones anteriores de modo que tengan por denominador una potencia de 10?
c) Prueba que los números fraccionarios que tienen por denominador 2 ó 5, o productos de estos, son decimales exactos.

2º.- Dado el número n/11, se pide:
a) El periodo para n = 1,2, 3,...,10. ¿Cuántas cifras tiene en cada caso?
b) ¿Qué valores debe tomar n para que no sea periódico?

3º.- Un alumno escribe que $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Calcula el error absoluto que se produce ¿Es aceptable ese error?

4º.- Un parque ocupa un terreno cuadrado de 100 m de lado:
a) Calcula la fórmula que da la diagonal de un cuadrado de lado x.
b) Utiliza la fórmula anterior para hallar el valor de la diagonal del terreno tomando $\sqrt{2} = 1{,}41$ y $\sqrt{2} =1{,}4142$.
c) ¿Cuál es la diferencia entre los valores obtenidos? ¿Cuál es el error relativo que se comete al tomar el valor $\sqrt{2} =1{,}41$ con respecto a $\sqrt{2} =1{,}4142$?

5º.- Dibuja en el plano una línea cuya longitud sea exactamente igual a π ¿Cuál puede ser? ¿Cómo se caracteriza?

6º.- Un arquitecto quiere hacer un monumento al número π y diseña un gran cubo con las medidas interiores largo, ancho y alto iguales a π metros. El volumen es casi un número entero primo. ¿Se puede asumir esta información?

7º.- Todo número natural puede expresarse como suma de cuatro cuadrados (como máximo). Utiliza este resultado para construir un segmento igual a $\sqrt{46}$.

8º.- Una casa de campo tiene un depósito de agua de forma cúbica, de 50 m3 de capacidad. Si tu calculadora no es científica, calcula la medida interior del lado del cubo con dos cifras decimales.

9º.- Elige la semirrecta formada por todos los números x que cumplen la condición de que $\sqrt{(x - 3)}$ se puede calcular: a) [0 + ∞] b) [- ∞, 3] c) [3, + ∞] d) [O, 3].

10º.- Indica las semirrectas de la recta real donde los cuadrados de los números son mayores que 16.

11º.- Expresa mediante intervalos o semirrectas el conjunto de los números reales cuyos puntos en la recta real están a una distancia del 5:
a) Menor que cuatro unidades,
b) Mayor que ocho unidades.

12º.- La función y = x - 4 está definida para todo x. Indica los intervalos o semirrectas donde la función toma valores positivos.

13º.- Una empresa ha previsto que desde el momento de su funciona las ganancias en millones de euros vendrán dadas por la función y = 2x – 8. Dibuja la gráfica y determina los intervalos en los que tiene pérdidas o ganancias durante los próximos 10 años.

14º.- Un triángulo isósceles tiene 36 cm de perímetro. ¿En qué intervalo están las medidas de la base?

15º.- Dada la función y = x2 - 1, indica los intervalos o semirrectas donde la función toma valores positivos o negativos.

16º.- La raíz cuadrada de un número negativo no está definida. Halla el intervalo donde la función f(x) = √ (x2 – 9) no está definida.

10. Evaluación de la unidad.

Entendemos la evaluación como un proceso continuo e integrador, basándonos en las posibilidades de disponer permanentemente de información acerca del camino que está siguiendo el alumno/a en su proceso de aprendizaje y en su formación total como persona. Esto nos permitirá regular los siguientes ritmos y estilos de la enseñanza con los del aprendizaje para reforzar los elementos positivos que vayan apareciendo, y corregir y subsanar los negativos mediante las actuaciones complementarias que sean necesarias.

10.1 Criterios de evaluación.

Los criterios de evaluación para 4º de ESO que se exponen a continuación, son los correspondientes al Decreto 148/2002, de 14 de mayo. Pero debemos tener en cuenta que a partir del curso 2008/2009 comenzará a aplicarse el Decreto 1631/2006.

1. Aplicar los conocimientos matemáticos a distintas situaciones.
Se trata de utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la realidad, utilizando recursos habituales en la sociedad entre los que es preciso destacar los tecnológicos (calculadoras, programas informáticos, etc.).

2. Resolver problemas, controlar los procesos que se están ejecutando y tomar decisiones.
Se trata de reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados obtenidos.

3. Comunicar ideas matemáticas y utilizar distintas formas de razonamientos.
Se trata de incorporar ideas matemáticas al proceso de comunicación habitual del alumnado, utilizando de forma correcta algunos tipos de razonamiento que son de uso común y elemental.

4. Usar conceptos y estructuras conceptuales.
Se trata de practicar con los conocimientos adquiridos, relacionar distintos aspectos del conocimiento matemático y reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.

5. Utilizar procedimientos matemáticos, algoritmos y destrezas instrumentales.
Se trata de trabajar los aspectos operativos del conocimiento matemático, desde varios puntos de vista: la ejecución correcta, el saber cuándo aplicarlos, y conocer por qué funcionan.

6. Valorar y potenciar las propias capacidades requeridas para el aprendizaje.
Se trata de reconocer la importancia de ciertas actitudes necesarias para alcanzar un desarrollo óptimo y deseable de las capacidades expresadas en los objetivos del área.

En cuanto a la evaluación concreta de la unidad, deberemos evaluar la adquisición de los siguientes conocimientos:

- Expresar fracciones en forma decimal.
- Distinguir los números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos, y obtener su expresión fraccionaria.
- Reconocer los números irracionales como números decimales no periódicos con infinitas cifras.
- Clasificar los números decimales en racionales e irracionales.
- Representar los números racionales e irracionales en la recta real.
- Utilizar los intervalos para expresar conjuntos de números.
- Calcular aproximaciones de un número irracional por exceso y por defecto.
- Aproximar números utilizando las técnicas de redondeo y truncamiento.

Hemos de tener en cuenta que en la unidad hemos recogido una serie de objetivos a alcanzar por los alumnos, será fundamental que en el apartado de evaluación valoremos el cumplimiento o no de dichos objetivos.

10.2 Instrumentos de evaluación y criterios de calificación.

Para la valoración del proceso de aprendizaje de la unidad se tendrá en cuenta el trabajo personal diario efectuado por el alumno. Para ello se harán con frecuencia pequeñas pruebas en el transcurso de la clase, las cuales podrán ser orales, en la pizarra o escritas.

Se hará además una prueba escrita al final de la unidad didáctica para evaluar los conocimientos adquiridos durante la misma.

Para la calificación final de cada alumno se tendrá en cuenta toda la labor realizada a lo largo de la unidad, y se basará en la información recogida en el cuaderno del profesor mediante la observación sistemática, las pruebas puntuales, la asistencia, y la actitud del alumno/a ante la asignatura en el desarrollo de la unidad.

Concretamente la calificación se obtendrá de la siguiente forma:

- Un 60% de los resultados de la prueba escrita.
- Un 20% de pruebas cortas de forma esporádica. Éstas son pruebas de actividades ya realizadas en clase. Así vemos qué alumnos tienen un trabajo diario y continuo.
- Un 20% de actitud ante la materia: interés, respuesta, comportamiento, esfuerzo,…

Este punto y estos porcentajes no están recogidos en ningún sitio de forma oficial, aunque las indicaciones dadas desde los organismos oficiales, así como la propia experiencia como docente, me llevan a tratar de fomentar el trabajo en los alumnos, aunque para ello tenga que dar un menor peso a las pruebas escritas.

11. El autor

Licenciado en Matemáticas. Universidad de Sevilla. (2001)

Experiencia docente:

Profesor en la Universidad de Sevilla en el Master de Tecnologías de Análisis para la Sociedad de la información.

Profesor de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza de Educación Secundaria Obligatoria en el IES Mariana de Pineda (Dos Hermanas/Sevilla).

Amplia experiencia impartiendo clases en academias y a particulares de matemáticas a distintos niveles educativos, principalmente a niveles de secundaria obligatoria, bachillerato y universidad.

Elaboración de programaciones y unidades didácticas. Conocimiento de la estructura, objetivos y contenidos del sistema educativo.

Impartición de cursos sobre aprendizaje de distintas aplicaciones informáticas a sus usuarios finales en la Junta de Andalucía.

Otra Experiencia Profesional:

Septiembre 2001 / Junio 2005: Tareas de análisis y programación de aplicaciones en entorno Oracle 9i para la Junta de Andalucía.

Junio 2005 / Septiembre 2007: Tareas de análisis y programación de aplicaciones en entorno Oracle 9i y Cobol para el Servicio Andaluz de Salud.

Marzo 2001 / Febrero 2004: Tareas de consultaría para la aplicación S.R.P. de la Consejería de Justicia de la Junta de Andalucía.
Formación:
Octubre 2004 - Marzo 2005: Curso de Adaptación Pedagógica (C.A.P.) en el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid.
Máster en Tecnologías de Análisis para la Sociedad de la Información - Universidad de Sevilla (Edición 2003- 2004)

Título de Experto Universitario en Tecnologías de Análisis para la Sociedad de la información (Edición 2001 - 2002).

Curso Superior de Capacitación en las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. (Periodo: 01/10/2001-23/01/2002, Duración: 400 horas) Organizado por la Consejería de Empleo y Desarrollo Tecnológico de la Junta de Andalucía).

Correo electrónico: f_flores_gil@hotmail.com